УДК 519.254

ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ: ПРИМЕНЕНИЕ К СИГНАЛАМ ГАУССОВОЙ ФОРМЫ

М.С.Хвастунов

Предложены простые и эффективные алгоритмы для восстановления параметров гауссова сигнала по его вейвлет-образу. Установлены новые свойства вейвлет-образов гауссовых сигналов: высокая стабильность площади этих вейвлет-образов и линейная зависимость площади вейвлет-образов от числа событий в этих сигналах в широком интервале отношения эффект/фон.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Wavelet-Analysis: Application to Gaussian Signals

M.S.Khvastunov

Simple and effective algorithms are presented to reconstruct the parameters of a Gaussian signal by its wavelet-transform. New features of this wavelet-transform are observed: high stability of its area and a linear dependence of this area on the number of events in the signal over a wide interval of the effect/background ratio.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

1. Введение

Вейвлет-анализ — сравнительно новый математический аппарат, предназначенный для анализа информации, содержащей сигналы в виде локализованных пиков (гауссовых, брейт-вигнеровских). Информация, получаемая в экспериментах по физике ядра и элементарных частиц, носит именно такой характер. Фурье-анализ в данном случае не применим или малоэффективен.

Вейвлет-преобразование одномерного сигнала состоит в его разложении по базису, основой которого выбрана солитоноподобная функция с определенными свойствами. Базис получают посредством смещения и растяжения (сжатия) этой функции, именуемой вейвлетом.

В данной работе используются гауссовы вейвлеты и анализируемые сигналы задаются в гауссовой форме. В этом случае результат вейвлет-преобразования (коэффициенты вейвлет-преобразования сигнала, вейвлет-образы сигнала) представляются в аналитическом виде. Это удобно при анализе возможностей нового математического аппарата.

Целью данной работы являлись изучение свойств вейвлет-преобразования на примере его применения к сигналам гауссовой формы и разработка алгоритмов восстановления параметров анализируемого сигнала по его вейвлет-образу.

2. Вейвлеты

Успех в применении вейвлетов к анализу сигналов в существенной мере обусловлен удачным выбором базисных функций вейвлет-преобразования. Перечислим те свойства этих функций, которые будут использованы ниже [1].

Локальность. В вейвлет-преобразовании используются локализованные базисные функции. В этом новое преобразование существенно отличается от преобразования Фурье.

Нулевое среднее. Интеграл от вейвлета $\psi_m(x)$ m-го порядка равен нулю:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m(x)\, dx = 0. \tag{1}$$

Это свойство вейвлетов позволяет анализировать особенности высокого порядка в исследуемом сигнале, игнорируя наиболее регулярные полиномиальные составляющие в этом сигнале.

В данной работе используются гауссовы вейвлеты, определяемые как производные функции Гаусса [1]:

$$g_m(x) = (-1)^{m+1} \frac{d^m}{dx^m}\left[\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\right], \tag{2}$$

где $m \geq 1$. Обычно используют вейвлеты 1-го и 2-го порядков:

$$g_1(x) = -x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \tag{3}$$

$$g_2(x) = (1 - x^2) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \tag{4}$$

или вейвлеты до 4-го порядка:

$$g_3(x) = x(3 - x^2) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \tag{5}$$

$$g_4(x) = -(3 - 6x^2 + x^4) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \tag{6}$$

Нами использовались гауссовы вейвлеты до 8-го порядка:

$$g_5(x) = -x(15 - 10x^2 + x^4) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \tag{7}$$

$$g_6(x) = (15 - 45x^2 + 15x^4 - x^6) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \tag{8}$$

$$g_7(x) = x(105 - 105x^2 + 21x^4 - x^6)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \qquad (9)$$

$$g_8(x) = -(105 - 420x^2 + 210x^4 - 28x^6 + x^8)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \qquad (10)$$

В вейвлетах g_3, g_4, g_7, g_8 изменены знаки в сравнении с правилом (2).

Присутствие экспоненциального множителя в вейвлетах обеспечивает их локальность. Перечислим далее свойства гауссовых вейвлетов [2], которые нам будут нужны.

- Гауссов вейвлет $g_n(x)$ имеет n нулей.
- Из определения гауссовых вейвлетов следует, что производная от вейвлета $g_n(x)$ совпадает (с точностью до знака) с вейвлетом $g_{n+1}(x)$: $dg_n(x)/dx = -g_{n+1}(x)$.
- Из последнего выражения следует, что экстремумы вейвлета $g_n(x)$ совпадают с нулями вейвлета $g_{n+1}(x)$.
- Из этого же выражения получаем значение интеграла от гауссова вейвлета: $\int_{x_1}^{x_2} g_n(x)\,dx = g_{n+1}(x_1) - g_{n+1}(x_2)$. Устремляя в этом выражении $x_1 \to -\infty$, $x_2 \to +\infty$ и учитывая локальность вейвлета, получаем выражение $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\,dx = 0$, подтверждающее нулевое значение интеграла от гауссова вейвлета $g_n(x)$.
- В работе [2] введен полезный параметр — относительная площадь гауссова вейвлета:

$$w(x) = \int_0^x |g_n(x)|\,dx \Big/ \int_0^{+\infty} |g_n(x)|\,dx.$$

Там же было показано, что при $x \geq 3$ первые четыре гауссова вейвлета имеют приблизительно одинаковую относительную площадь. Численным методом мы убедились, что это свойство гауссовых вейвлетов имеет место и до вейвлетов 8-го порядка.

3. Вейвлет-преобразование

Выбрав вейвлет $\psi(x)$ (например, один из гауссовых вейвлетов), сконструируем базис с помощью непрерывных масштабных преобразований и переносов вейвлета $\psi(x)$ [1]:

$$\psi_{ab}(x) = a^{-1/2}\,\psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \qquad (11)$$

где a — масштаб вейвлета, а b — параметр сдвига. Интегральное вейвлет-преобразование сигнала $\psi(x)$ имеет вид [2]:

$$W_\psi(a, b)_f = c_\psi^{-1/2}\int a^{-1/2}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)f(x)\,dx, \qquad (12)$$

где c_ψ — нормировочный коэффициент; для гауссовых вейвлетов он равен $2\pi(n-1)!$ [3]. Величину $W_\psi(a, b)_f$ называют также коэффициентом вейвлет-преобразования, вейвлет-образом анализируемого сигнала $f(x)$.

Вейвлет-анализ иногда называют «математическим микроскопом» [1]. При этом параметр сдвига b определяет точку фокусировки, масштаб вейвлета a — увеличение и выбранный вейвлет — оптические качества микроскопа.

Приведем одно из свойств вейвлет-преобразования, не зависящее от выбора анализирующего вейвлета, характеризующее линейность вейвлет-преобразования [1]:

$$W[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)] = \alpha W[f_1(x)] + \beta W[f_2(x)]. \tag{13}$$

Это свойство нам понадобится в дальнейшем.

Пусть анализируемый сигнал имеет гауссову форму:

$$g(x) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2 /2\right]. \tag{14}$$

Вейвлет-образ сигнала (14) при использовании гауссовых вейвлетов описывается выражением

$$W_{gn}(a, b)_g = \frac{N}{\sqrt{2\pi(n-1)!}} (a/a_w)^{n+1}\, g_n(z), \tag{15}$$

где $z = (x_0 - b)/a_w$ и $a_w = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Выражение (15) отличается от аналогичного, приведенного в [2], своей безразмерностью. Из этого выражения видно, что вейвлет-образ гауссова сигнала g при использовании гауссова вейвлета g_n подобен гауссову вейвлету [2]. Поэтому все указанные выше свойства гауссовых вейвлетов присущи также вейвлет-образу W_{gn} гауссова сигнала.

Перечислим основные параметры вейвлет-образов гауссова сигнала, они понадобятся при восстановлении параметров сигнала по его вейвлет-образу.

В табл.1 приведены координаты основных нулей и экстремумов нечетных вейвлет-образов (15), вычисленные согласно выражениям (3), (5), (7), (9). При этом параметр

Таблица 1. Координаты центрального нуля z_{n0} и первых боковых экстремумов (z_{n1}, z_{n2}) нечетных вейвлет-образов, n — порядок вейвлет-образа

n	z_{n0}	$z_{nk}(z_{n1}, z_{n2})$
1	0,0	± 1,000
3	0,0	± 0,742
5	0,0	± 0,618
7	0,0	± 0,541

Таблица 2. Координаты центрального экстремума z_{m0} и первых боковых нулей (z_{01}, z_{02}) четных вейвлет-образов, m — порядок вейвлет-образа

m	z_{m0}	$z_{0k}(z_{01}, z_{02})$
2	0,0	± 1,000
4	0,0	± 0,742
6	0,0	± 0,618
8	0,0	± 0,541

x был заменен на $z = (x_0 - b)/a_w$. Все нечетные вейвлет-образы имеют центральные нули при $z_{n0} = 0$ и примыкающие к ним слева и справа экстремумы (z_{n1}, z_{n2}).

В табл.2 приведены координаты основных нулей и экстремума четных вейвлет-образов, вычисленные согласно выражениям (4), (6), (8) и (10). Параметр x также заменен на $z = (x_0 - b)/a_w$. Все четные вейвлет-образы имеют центральные экстремумы при $z_{m0} = 0$ и примыкающие к ним слева и справа нули (z_{01}, z_{02}).

4. Выбор масштаба вейвлетов

В вейвлет-анализе при вычислении вейвлет-образа $W(a, b)$ некоторого сигнала масштаб вейвлета a варьируется в широких пределах. По существу параметр a рассматривается как вторая степень свободы (кроме основной — параметра b). Графическое представление вейвлет-образа $W(a, b)$, например одномерного сигнала, являет собой двумерную поверхность в трехмерном пространстве [1].

В работе [3] использовано фиксированное значение масштаба вейвлета, определяемое из условия максимума $W(a, b)$ как функция a. Для вейвлет-образа 2-го порядка гауссова сигнала параметр a оказался равным $a = \sqrt{5} \cdot \sigma$.

Нам представляется более подходящим к условиям обработки экспериментальной информации подход, описанный в [2]. В этой работе предлагается использовать такое значение масштаба вейвлета, «чтобы на интервал гистограммирования (x_{min}, x_{max}) приходилась вполне определенная относительная площадь вейвлета w». Для гауссова вейвлета g_1 вычисления легко проводятся аналитически. Для вейвлетов более высокого порядка вычисления могут быть выполнены численно.

Выберем интервал $\upsilon = x_{max} - x_{min}$ (например, $\upsilon = 6\sigma(\pm 3\sigma)$), в пределах которого мы будем рассматривать гауссов сигнал. По таблице интеграла вероятности определяем соответствующую интервалу υ вероятность w. Масштаб a анализирующего вейвлета выбираем исходя из условия: этот вейвлет «накрывает» анализируемый сигнал (его центральную часть, определяемую интервалом υ) своей центральной частью, относительная площадь которой равна определенной выше вероятностью w. При этом масштаб вейвлета определяется формулой

$$a = (\upsilon/2)/\sqrt{-2\ln(1-w)}. \tag{16}$$

Это выражение отличается от приведенного в работе [2] двойкой под корнем.

Величину $a_w = \sqrt{a^2 + \sigma^2}$, входящую в выражение для вейвлет-образа гауссового сигнала (15), назовем масштабом вейвлет-образа гауссова сигнала.

Соответствующий интервалу υ интервал υ_w гистограммирования вейвлет-образа гауссова сигнала определяется формулой

$$\upsilon_w = 2a_w\sqrt{-2\ln(1-w)}. \tag{17}$$

Величины a и a_w характеризуют разрешающие способности соответственно гауссова вейвлета и вейвлет-образа гауссова сигнала. Решение вопроса — какой масштаб вейвлета выбрать (в соответствии с [2] или [3]) — осуществлялось методом моделирования. Генерировался дублет гауссовых сигналов с равными амплитудами и σ; центры сигналов были разнесены на $2{,}2\sigma$. В варианте с высоким разрешением вейвлетов [2] (например, $a = 0{,}85\sigma$, $w = 0{,}9907$) компоненты дублета хорошо разделяются вейвлетами 4-го порядка и выше. А при низком разрешении вейвлетов [3] ($a = \sqrt{5} \cdot \sigma$) компоненты дублета представляются в виде одного сигнала до вейвлетов 8-го порядка. Далее был использован масштаб вейвлетов с высоким разрешением.

5. Восстановление параметров гауссова сигнала

В процессе работы с вейвлетами была создана серия программ вычислений на компьютере вейвлет-образов сигналов и различных параметров этих сигналов. Вейвлет-образ сигнала вычислялся как по формуле (15), так и численно в соответствии с выражением (12), где $f(x)$ заменялось гистограммой, представляющей гауссов сигнал, а вейвлет ψ заменялся гауссовыми вейвлетами. Результаты этих двух вычислений (аналитического и численного) совпадали для вейвлет-образов всех порядков от 1-го до 8-го. Вычисления вейвлет-образов гауссового сигнала численным способом имитировало вычисление вейвлет-образа анализируемого сигнала по его экспериментальной гистограмме.

Восстановление параметров сигнала по его вейвлет-образу возможно несколькими способами. Здесь будет приведен вариант формул для восстановления параметров сигнала с использованием наиболее стабильных параметров вейвлет-образов: центральных нулей (экстремумов) и примыкающих к ним (слева и справа) боковых экстремумов (нулей), приведенных в табл.1 и 2.

По графику нечетного вейвлет-образа сигнала $W_{gn}(a, b)_g$ n-го порядка определяем: координату b_0 — центрального нуля, координаты b_{m1}, b_{m2} первых боковых экстремумов и амплитуды $W_{gn}(b_{m1})$, $W_{gn}(b_{m2})$ этих экстремумов. В силу симметрии (точнее, антисимметрии) нечетного вейвлет-образа W_{gn} должны выполняться (в пределах ошибок измерения) равенства: $b_0 = (b_{m1} + b_{m2})/2$ и $W_{gn}(b_{m1}) = W_{gn}(b_{m2})$.

В табл.1 приведены (в переменных $z = (x_0 - b)/a_w$) численные значения координаты z_{n0} центрального нуля:

$$z_{n0} = (x_0 - b_0)/a_w = 0, \tag{18}$$

и координат z_{nk} (z_{n1}, z_{n2}) первых боковых экстремумов:

$$z_{nk} = (x_0 - b_m)/a_w, \tag{19}$$

где $b_m = b_{m1}$ или $b_m = b_{m2}$.

Из выражения (18) следует, что координата b_0 центрального нуля нечетного вейвлет-образа сигнала совпадает с координатой x_0 центра этого сигнала:

$$x_0 = b_0 \quad \text{или} \quad x_0 = (b_{m1} + b_{m2})/2. \tag{20}$$

При анализе некоторого экспериментального распределения (сигнала) обычно знают оценку среднеквадратической ошибки σ, исходя из которой выбирают масштаб a вейвлета и далее вычисляют вейвлет-образ этого сигнала. Зная параметры вейвлет-образа сигнала можно уточнить значение параметра σ. Для этой цели используют выражение (19). Учитывая соотношение $a_w = \sqrt{\sigma^2 + a^2}$ из (19), получаем уточненное значение σ:

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{b_0 - b_{mi}}{z_{nk}}\right)^2 - a^2}, \quad \text{или} \quad \sigma = \sqrt{\left(\frac{b_{m2} - b_{m1}}{2z_{nk}}\right)^2 - a^2}, \tag{21}$$

где $b_{mi} = b_{m1}$ или b_{m2}.

Если эта величина σ зна́чимо отличается от первоначальной оценки этого параметра, то выбирают масштаб a вейвлета, соответствующий новому значению σ, вычисляют вейвлет-образ сигнала и снова восстанавливают параметры x_0 и σ сигнала. Обычно достаточно 2 или 3 циклов вычислений, чтобы получить практически повторяющееся значение параметра σ анализируемого сигнала. Далее, пользуясь выражением (15), восстанавливают число N событий в сигнале:

$$N = \sqrt{2\pi(n-1)!}\; p(a_w/a)^{n+1}\; W_{gn}(z_{nk})/g_n(z_{nk}), \tag{22}$$

где $W_{gn}(z_{nk})$ — определенная по графику вейвлет-образа сигнала n-го порядка его амплитуда, $p = \sigma/dm$, dm — ширина ячейки гистограммы.

Восстановление параметров сигнала по его четным вейвлет-образам может быть проведено способом, подобным описанному выше. При этом центральные нули заменяются на центральные экстремумы, и боковые экстремумы — на боковые нули. По графику четного вейвлет-образа сигнала $W_{gm}(a, b)_g$ m-го порядка определяют: координату b_m центрального экстремума и его амплитуду W_{gm} и координаты b_{01} и b_{02} первых боковых нулей. В силу симметрии четного вейвлет-образа должно выполняться равенство $b_m = (b_{01} + b_{02})/2$.

В табл.2 приведены (в переменных $z = (x_0 - b)/a_w$) численные значения координаты z_{m0} центрального экстремума

$$z_{m0} = (x_0 - b_m)/a_w = 0 \tag{23}$$

и координаты z_{0k} (z_{01} и z_{02}) первых боковых нулей

$$z_{0k} = (x_0 - b_0)/a_w, \tag{24}$$

где $b_0 = b_{01}$ или $b_0 = b_{02}$.

Из выражения (23) следует, что координата b_m центрального экстремума четного вейвлет-образа сигнала совпадает с координатой x_0 центра этого сигнала:

$$x_0 = b_m, \quad \text{или} \quad x_0 = (b_{01} + b_{02})/2. \tag{25}$$

Аналогично изложенному выше (для нечетных вейвлет-образов), из выражения (24) получаем уточненное значение σ:

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{b_m - b_{0i}}{z_{0k}}\right)^2 - a^2}, \quad \text{или} \quad \sigma = \sqrt{\left(\frac{b_{02} - b_{01}}{2z_{0k}}\right)^2 - a^2}, \tag{26}$$

где $b_{0i} = b_{01}$ или b_{02}.

Если это значение σ заметно отличается от первоначальной оценки, то (подобно изложенному выше для нечетных вейвлет-образов) выполняют несколько (2—3) циклов вычислений.

Пользуясь выражением (15), восстанавливаем число N событий в сигнале:

$$N = \sqrt{2\pi(m-1)!}\, p(a_w/a)^{m+1}\, W_{gm}(z_{m0})/g_m(z_{m0}), \tag{27}$$

где $W_{gm}(z_{m0})$ — определенная по графику вейвлет-образа сигнала m-го порядка его амплитуда, $p = \sigma/dm$, dm — ширина ячейки гистограммы.

Описанные выше алгоритмы восстановления параметров сигнала по его вейвлет-образу просты, существенно проще описанных в работе [2]. В предложенной процедуре восстанавливаются все три параметра анализируемого сигнала (положение центра, σ и число N событий) по вейвлет-образу этого сигнала одного порядка. А в цитированной работе [2] авторы для данных целей используют вейвлет-образы двух порядков (2-го и 4-го). Как было нами выявлено путем моделирования, по мере повышения порядка вейвлет-образа возрастает его чувствительность к фону. Поэтому при восстановлении параметров сигнала нежелательно использовать в одном выражении величины, относящиеся к вейвлет-образам разных порядков.

С незначительными изменениями изложенная выше процедура восстановления параметров сигнала может быть использована для разделения компонент дублета и восстановления параметров этих компонент. Методом моделирования было обнаружено, что дублет гауссовых сигналов, разнесенных на $1{,}7\sigma$ с одинаковыми амплитудами и σ с помощью гауссовых вейвлетов, разделяется на два компонента, все параметры которых могут быть оценены с использованием вейвлет-образа дублета. При этом не требовалось (как в [2] и [3]) знать положение центра одного из компонент дублета.

Изложенная в данном разделе процедура восстановления праметров сигнала по его вейвлет-образу иллюстрирует реконструкционное свойство вейвлет-преобразования [1].

6. Влияние статистики на вейвлет-образ сигнала

Влияние статистики (числа N событий в сигнале) на форму вейвлет-образа этого сигнала изучалось посредством моделирования. Методом Монте-Карло генерировались гауссовы сигналы с N от 10 до 1000. Вычислялись вейвлет-образы этих сигналов. Проводились сравнения этих вейвлет-образов с вейвлет-образами гауссовых сигналов, задаваемых аналитически (эталонными вейвлет-образами). Были обнаружены сильные искажения модельных вейвлет-образов высших порядков (в сравнении с эталонными). Так, для сигнала с $N = 10$ только вейвлет-образ 1-го порядка имел удовлетворительную форму, пригодную для восстановления параметров исходного сигнала. Вейвлет-образы сигналов с N от 20 до 100 1-го и 2-го порядков пригодны для восстановления параметров сигнала. По мере повышения статистики от 100 до 1000 порядок вейвлет-образа, пригодного для восстановления параметров сигнала, повышается от 2 до 7.

Все вейвлет-образы, пригодные для восстановления параметров исходного сигнала, имеют вид гладких кривых, несмотря на то, что исходный сигнал подвержен статистическим флуктуациям. Это обстоятельство дает возможность восстанавливать по вейвлет-образу сигнала параметры этого сигнала с точностью, не уступающей той, которая достижима в методе наименьших квадратов (см. также [2] и [3]).

Заметные искажения формы вейвлет-образов высших порядков объясняются повышенным разрешением этих вейвлет-образов. Такие вейвлет-образы зачастую имитируют дублеты, расщепляют исходный сигнал на два (особенно при низкой статистике).

7. Влияние фона на вейвлет-образ сигнала

Равномерно распределенный фон можно представить в виде $h = h_0 + h_x$, где h_0 — постоянная составляющая фона, а h_x — его осциллирующая часть. В силу линейности вейвлет-преобразования (см. (13)), вейвлет-образ фонового сигнала можно представить в виде

$$W_\psi(a, b)_h = W_\psi(a, b)_{h0} + W_\psi(a, b)_{hx} = W_\psi(a, b)_{hx}, \tag{28}$$

так как $W_\psi(a, b)_{h0} = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} h_0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{b-x}{a}\right) dx = 0$ в силу того, что интеграл от любого вейвлета равен нулю (см. (1)).

Справедливость выражения (28) проверялась посредством моделирования. Методом Монте-Карло генерировался равномерный фон (10000 событий в гистограмме со 100 ячейками), и вычислялись вейвлет-образы этой гистограммы (вейвлет-образы $W(h_0 + h_x)$ сигнала $h = h_0 + h_x$). Затем из каждой ячейки фоновой гистограммы вычиталось по 100 событий (всего — 10000 событий из всей гистограммы, т.е. вычиталась постоянная составляющая h_0 фона), и оставлялась тем самым только осциллирующая составляющая h_x фона. Вычислялись вейвлет-образы этой составляющей фона $W(h_x)$. Вейвлет-образы осциллирующей составляющей фона полностью совпадали с вейвлет-образами $W(h_0 + h_x)$ полного фона.

Вейвлет-образ суммарного сигнала (гауссов сигнал g и осциллирующая часть h_x фона) можно записать в виде

$$W_\psi(a, b)_h = W_\psi(a, b)_g + W_\psi(a, b)_{hx}.$$

Влияние фона изучалось посредством моделирования. Методом Монте-Карло генерировались гауссовы сигналы различной интенсивности и равномерный фон разного уровня. Гауссовы сигналы складывались с фоном. Вычислялись вейвлет-образы: гауссова сигнала, фонового сигнала и суммы этих сигналов. Суммарный сигнал удобно характеризовать параметром $k = N_e/(N_e + N_ф)$, где N_e — число событий в гауссовом сигнале, а $N_ф$ — суммарное число фоновых событий в тех ячейках гистограммы, в которых присутствуют события гауссова сигнала. Полезно также ввести новый параметр — площадь вейвлет-образа анализируемого сигнала.

В табл.3 приведены данные, характеризующие зависимость (от порядка n гауссова вейвлета) площади SW_{ne} вейвлет-образа гауссова сигнала и площади $SW_{nф}$ вейвлет-образа фонового сигнала (при $k = 0{,}6$ и $N_e = 1000$). Видно, что по мере возрастания порядка n анализирующего вейвлета площадь SW_{ne} уменьшается, а площадь $SW_{nф}$ возрастает. Отсюда следует, что размер площади вейвлет-образа 1-го порядка наиболее устойчив к влиянию фона. Рост площади $S_{nф}$ вейвлет-образа фонового сигнала h_x по мере возрастания порядка n вейвлет-образа можно объяснить повышением (с ростом n) разрешающей способности вейвлетов, при этом осцилляции фона проявляются в вейвлет-образе этого фона сильнее. При вычислениях площадей вейвлет-образов параметр $p = \sigma/dm$ в выражениях (22) и (27) выбирался равным $p = 6{,}3825$.

В табл.4 приведены данные, иллюстрирующие зависимость от параметра $k = N_e/(N_e + N_ф)$ площади $SW_{1eф}$ вейвлет-образа 1-го порядка суммарного сигнала. Из табл.4 видно, что в широкой области изменения уровня фона (от $N_ф = 0$ при $k = 1$ до $N_ф = 9000$ при $k = 0{,}1$) площадь $SW_{1eф}$ вейвлет-образа суммарного сигнала остается практически постоянной. Здесь мы наблюдаем проявление замечательного свойства вейвлет-преобразования — его фильтрационное свойство [1].

Среднее значение осциллирующей части h_x фона равно нулю, поскольку постоянная составляющая h_0 фона включает все фоновые события. Осциллирующая часть фона

Таблица 3. Зависимость от порядка n гауссова вейвлета площади SW_{ne} вейвлет-образа бесфонового гауссова сигнала и площади $SW_{nф}$ вейвлет-образа фонового сигнала ($N_e = 1000$, $N_ф = 1333$ ($k = 0{,}6$))

n	1	2	3	4	5
SW_{ne}	431,3	335,8	235,2	160,8	111,0
$SW_{nф}$	9,76	15,9	20,0	23,7	28,5

Таблица 4. Зависимость площади $SW_{1eф}$ вейвлет-образа 1-го порядка суммарного сигнала (гауссового g и фонового h_x сигналов) от уровня фона: $k = N_e/(N_e + N_ф)$, $N_e = 1000$

k	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
$SW_{1eф}$	431,3	434,7	431,6	432,0	437,3	439,9	434,2	422,0	427,5	429,2

несколько изменяет форму сигнала, уменьшая и (в среднем на столько же) увеличивая содержимое соседних ячеек гистограммы суммарного сигнала. Положение этих ячеек относительно центра сигнала может смещаться. В результате это приводит к некоторому разбросу размеров площади вейвлет-образов.

В экспериментальных распределениях (гистограммах) полиномиальная составляющая (фоновая подложка) сигнала может иметь заметный наклон. Однако при вейвлет-анализе гистограмм экспериментальный материал последовательно анализируется малыми частями (по 8–10σ). При этом наклон фоновой подложки становится незначительным.

8. Площадь вейвлет-образа сигнала

Выше была продемонстрирована стабильность площади вейвлет-образа сигнала при изменении фоновых условий (см. табл.4). Здесь же будет показано, что площадь вейвлет-образа сигнала пропорциональна числу событий N_e в сигнале в широком интервале значений параметра $k = N_e/(N_e + N_\phi)$. В табл.5 приведены данные, характеризующие зависимость средней площади SW_{g1} вейвлет-образа 1-го порядка гауссова сигнала от числа N_e событий в этом сигнале при различных фоновых условиях. Для интервала N_e от 10 до 100 параметр k изменялся в пределах от 0,3 до 1,0, а для N_e от 200 до 1000 — k = 0,1–1,0. Модельные данные табл.5 хорошо ложатся на прямую

$$SW_{g1} = qN_e. \tag{29}$$

Таблица 5. Зависимость средней площади SW_{g1} вейвлет-образа 1-го порядка гауссова сигнала от числа N_e событий в этом сигнале при фоновых условиях, соответствующих интервалам k = 0,3–1,0 и k = 0,1–1,0; $k = N_e/(N_e + N_\phi)$

N_e	10	20	40	60	80	100	200	400	600	800	1000
SW_{g1}	3,7 ± 0,6	9,3 ± 1,0	18,4 ± 0,6	26,7 ± 2,0	35,1 ± 2,1	43,2 ± 1,9	89,7 ± 3,5	184,2 ± 7,1	268,9 ± 5,6	350,7 ± 5,2	436,9 ± 7,6
k	k = 0,3–1,0						k = 0,1–1,0				

В табл.6 приведены несколько значений параметра q и соответствующие им величины хи-квадрата (на одну степень свободы).

Площади SW_{g10} эталонных вейвлет-образов (когда гауссов сигнал задавался формулой (14), фон отсутствовал) и параметр q наклона связаны соотношением типа (29):

$$SW_{g10} = qN_e, \tag{30}$$

где q = 0,4355. Это значение q близко к оптимальному q = 0,440, соответствующему минимуму хи-квадрата (см. табл.6).

Таблица 6. Параметр q наклона прямой $SW_{g1} = qN_e$ и соответствующие ему значения хи-квадрата на одну степень свободы (при общем числе точек 11)

q	0,440	0,445	0,4355
χ^2	0,543	0,563	0,795

Напомним, что площади вейвлет-образов вычислялись в условиях, когда ширина dm ячейки гистограммы сигнала и σ были связаны соотношением $dm/\sigma = 0{,}1567$. Поэтому формулой (29) можно пользоваться при разных значениях σ, выбирая ширину ячейки гистограммы, соответствующую значению σ.

Пользуясь выражением (29), можно восстановить число N_e событий в анализируемом сигнале по площади его вейвлет-образа. Эта процедура определения N_e независима от описанной выше.

Здесь мы видим проявление свойств вейвлет-преобразования как фильтрационного, так и реконструкционного.

9. Заключение

Проведенные исследования вейвлет-преобразования гауссовых сигналов показали уникальные возможности этого нового математического аппарата — его фильтрационное и реконструкционное свойства. Перечислим основные результаты. Разработаны алгоритмы восстановления параметров гауссова сигнала по его вейвлет-образу. Причем это восстановление производится в более благоприятных условиях, по вейвлет-образу одного порядка, в отличие от ранее опубликованных методов, в которых для этой цели используются вейвлет-образы разных порядков. Была наблюдена высокая стабильность площади вейвлет-образа сигнала в широком интервале отношения эффект/фон. Была обнаружена линейная зависимость площади вейвлет-образа сигнала от числа событий в этом сигнале в широком интервале отношения эффект/фон.

References

1. Астафьева Н.М. — УФН, 1996, т.166, №11, с.1145.
2. Ососков Г.А., Шитов А.Б. — Сообщение ОИЯИ Р11-97-347, Дубна, 1997.
3. Altaisky M.V. — JINR Rapid Comm., 1995, No.6[74], p.35.

Рукопись поступила 23 сентября 1998 года.